

## المقدمة

تظهر عندنا يكون عدد المبالغة الرئيسية عدد زائد مما  
توجد دستور هذه الطريقة عدم كفاءة بالسر الرئيسي ثم تأخذ الحالة العامة  
ثم بحسب الخطأ المتركب.

لتأخذ المبالغة التكميلية يكون بالسر الرئيسي متساوياً  
-  $y = f(x)$  على المجال  $[a, b]$  ولتوجد التكميلية على المجال الرئيسي.

$$a = x_0 \quad b = x_0 + 2h$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx$$

نبدأ الآلية التالية  $f(x)$  بكتابة عدد تقريبية:

$$I = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx$$

$$\approx \int_{x_0}^{x_0+2h} \left[ y_0 + S \Delta y_0 + \frac{S(S-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \right] dx$$

$$S = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \Rightarrow dx = h ds$$

بما أن  $x = x_0 \Rightarrow S = 0$

$$x = x_0 \Rightarrow S = 0$$



$$x = x_0 + 2h \Rightarrow s = 2$$

$$I \approx h \int_0^2 \left[ y_0 + s \Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \right] ds$$

(التكامل على الكتاب)

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n]$$

$$y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n$$

$$R \leq \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(x)$$

يُختار  $x$  من المجال التكاملية حيث:  
يبلغ القيمة المطلقة تقبل على القيمة المطلقة للنقطة

ملاحظة: تفصيل التكامل

$$I \approx h \int_0^2 \left[ y_0 + s \Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \right] ds$$

$$= h \left[ s y_0 + \frac{s^2}{2} \Delta y_0 + \left( \frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 \right]_0^2$$



$$= h \left[ 2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3} [y_2 + 2y_1 + y_0] \right]$$

تقريب الجرد:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

ملاحظة:

نستخدم الخط المركب عندما يكون المشتقات غير مرتبة (4)  
مشتقة مرتبة وسنستخدم الخط المركب مع مشتقة الخط عندما يكون المشتقة  
من المشتقة الاربعة ثابتاً.

مثال:

$$f(x) = x^3 + 1$$

$x_i$	$x_0$						
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y_i$	1	1.001	1.008	1.027	1.064	1.125	1.216
	$f_0 = y_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$

أوجد الخط المركب  
الحل: عدد النقاط = 6

$$\int_0^{0.6} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + f_5) + 2(f_2 + f_4) + f_6]$$

$$= \frac{0.1}{3} [1 + 4(1.001 + 1.027 + 1.125) + 2(1.008 + 1.064) + 1.216]$$



$$+ 2(1.008 + 1.064 + 1.216)] = 0$$

لتوضيح الخطأ المرتكب على أساس الحالة

$$R = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\alpha)$$

$$R = \frac{0.6 - 0}{180} (0.1)^4 \max_{[0, 0.6]} f^{(4)}(x)$$

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f^{(3)}(x) = 6, f^{(4)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow R = 0$$

بالقيمة التقريبية هي نفسها الحقيقية

ملاحظة: المسألة بالسؤال مطابقة بالحدول فقط وليست مطابقة بأحد

$$f(x) = x^3 + 1$$

طريقة تعامد التفاضل

كل الطرائق السابقة هي عبارة عن علاقة تقريبية والمقصود من هذه الحسابات  
التكاملات العددية بالطرائق التقريبية  
من أجل الحصول على قيمة عددية في بعض الحالات عند نقاط محددة في فترة معينة  
محددة. وبالمثل يمكن إيجاد علاقة تعامد بين الشكل التام



$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^n c_j f(x_j) \quad (1)$$

لنوجد تكامل الدالة  $f(x)$  على  $[a, b]$  ثم نوجد بالكمال البسيط  $\int_a^b f(x) dx$  فنستخدم هنا كثيرات حدود ليغندر المتعامدة.

كثيرات حدود ليغندر المتعامدة هي كثيرات حدود متعامدة ضمن قبيل على المجال  $[a, b]$ .

$1 = P_0(x)$  وهي دالة صيغتك تكاملها على المجال  $[a, b]$  غير صالبة.

تقريباً حساب بعض التكاملات التي ليس لها حل تحليلي تقدر بالكمال البسيط.

يقول غير داليس  $f(x)$ ،  $g(x)$  متعامدة على المجال  $[a, b]$  إذا كان  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ .

$$\int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0$$

و نقول عنها أنها متعامدة ونظماً إذا تحته:

$\{f_n(x), f_m(x)\}$  متعامدة ونظماً على  $[a, b]$  إذا كان  $\int_a^b f_n(x)f_m(x)w(x)dx = 0$  لـ  $n \neq m$ .

$$\int_a^b w(x) f_n(x) f_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$$

و  $n = m$  فإن  $\int_a^b w(x) f_n^2(x) dx = 1$ .

صيغة لاجرانج:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$



بلا فظاً أبداً كثيراً عدد ليعبر عن مقامه من قبل فنحن نأخذ  $[1, 1]$  ونكتبها ليست نظاماً وجميع عدد كثيرات الحدود  
 جبرية من تحتها كلها  $[1, 1]$

إذا كان  $n$  زوجياً فما بالحدود في الطرف الآخر مستقيمة ذات قوى زوجية  
 من أجل  $n=2$   $L_2(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x$

$$L_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = x \quad \leftarrow n=1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad \leftarrow n=2$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \quad \leftarrow n=3$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) \quad \leftarrow n=4$$

بالصورة لترك العلاقة (2) نستطيع تقاطع  $x$  هي عدد ليعبر عن مقامه  $n$  و  $f(x)$  هي قيم الدالة عند تلك  
 الجذور

من أجل هي التوابيع الملائمة بين جابها بحيث تقول (2) أن  
 علاقة صحيحة تماماً من أجل كل كثيرة حدود جبرية درجتها لا يتجاوز  
 $n-1$  وبالتالي نصل إلى مجموعة من المعادلات الجبرية بلها  
 نستطيع حساب تلك التوابيع

$$\frac{2}{(1 - x_j^2) (L'_n(x_j))^2}$$



$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{و } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{و } n = m \end{cases}$$

أولاً لإيجاد الجمل  $[a, b]$  التالي ① يضل التكامل بالمثل:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$$

$$A_j = \frac{b-a}{2} C_j$$

هذه الحالة هي التقسيم التالي:

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

عند ذلك نجد أن الجمل  $[a, b]$  هو  $t$  هي كثيرات حدود ليمبر  
المعاصرة لـ  $n$ .

مثال:

أوجد بطريقة غاوس القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{e^{2x+1}}$$

مبدأً أولاً:  $n=2$  ثم  $n=3$  ثم  $n=4$

$$n=3 \Rightarrow L_3(x) = \frac{1}{2} (5x^2 - 3x)$$



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^3 c_j f(x_j)$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow f(x_1) = 0.8247271$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow f(x_2) = 0.5$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow f(x_3) = 0.1752028$$

$$c_j = \frac{2}{(1-x_j^2) [L'_3(x_j)]^2}$$

$$c_1 = \frac{2}{(1-x_1^2) [L'_3(x_1)]^2}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2} [5x^3 - 3x]$$

$$L'_3(x) = \frac{1}{2} [15x^2 - 3]$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{2}{(1-\frac{3}{5}) [\frac{1}{2}(15\frac{3}{5}) - 1]^2} = \frac{5}{9}$$

$$c_2 = \frac{2}{(1)(\frac{9}{4})} = \frac{8}{9}$$



... يمكن تكاملها...

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2x+1}}$$

$$= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= 0.999999999$$

ملف فقرة

... نلاحظ أن هذه الخواص هي من خواص الدالة التي تتطابق...

... حيث ليس لها علاقة بالدالة المتكاملة...

$$[f'(x)]^2 (1-x^2)$$

... فهي تتغير فقط لـ n

مثال

$$\int_0^1 x^{2x} dx$$

الحل:

... باعتبار أن المجال المطبق هو  $[-1, 1]$  نحصل على:

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}$$

... حيث أن  $n$  عدد زوجي...

$$L_3(t) = \frac{1}{2} (5t^3 - 3t) \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$t_2 = 0$$



$$x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$x_1 = 0, 1127 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = 0, 8272983$$

$$f(x_1) = 0, 1411257$$

$$f(x_2) = 1, 3591409$$

$$f(x_3) = 5, 2331985$$

$$C_3 = C_1 = \frac{5}{9}, \quad C_2 = \frac{8}{9}$$

$$A_1 = \frac{b-a}{2} \quad C_1 = \frac{5}{18} = A_3$$

$$A_2 = \frac{b-a}{2} \quad C_2 = \frac{4}{9}$$

$$\int_0^1 x^{2x} dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

$$= 2, 0969499$$



{ الطريقة العددية لحل المعادلات التفاضلية (هام 4)}

هنا علاقة ما بين المقول المستقل  $x$  والحالة  $y$  مع مشتقاتها المتتالية  
من الشكل:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

واحد حل المعادلة التفاضلية هو عبارة عن مجموعة متناهية من النقاط  
C. أما مجموعة حلول المعادلات التفاضلية فهي عبارة عن  
المعادلات وجميع شروطها الابتدائية حيث:  
عدد الشروط = رتبة المعادلة  
سوف نختار الطريقة على شرط ابتدائي واحد للمعادلة من الرتبة  
الاولى

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y'_0$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0$$

طريقة أويلر

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$



$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

من المعادلات:

للتقريب يمكن اعتبار:

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' \approx \frac{\Delta y}{h} \Rightarrow \Delta y \approx y' h$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

باعتبار:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + y'_n h$$

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n$$

$$= y_n + h f(x_n, y_n)$$

مثال:

$$y' = xy, \quad y(0) = 1 \rightarrow y_0$$

$$h = 0.1, \quad x = 0.5$$

الحل:



$$y_{n+1} = y_n + h y'_n = y_n + h f(x_n, y_n)$$

$$y_1 = y(x_1) = y_0 + h y'_0 = 1 + 0.1 (x_0, y_0) = 1$$

$$y_2 = y(x_2) = y_1 + h y'_1 = 1 + 0.1 (x_1, y_1)$$

$$= 1 + 0.1 (0.1) (1) = 1.01$$

$$y_3 = y(x_3) = y_2 + h y'_2 = 1.01 + 0.1 (0.2) (1.01)$$

$$= 1.0302$$

$$y_4 = y(x_4) = y_3 + h y'_3 = 1.061106$$

$$y_5 = y(x_5) = 1.10355624$$

الخطا التجميعي:

$$\frac{dy}{dx} = x y \Rightarrow \frac{dy}{y} = x dx$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

مثال:

أوجد بطريقة أويلر حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$x y' = x - y, \quad y(2) = 2$$



عند النقطة:  $x=0,8$  و  $h=0,2$

② طريقة أويلر المباشرة:

لتقريب لدينا  $y' = f(x, y)$  ،  $y(x_0) = y_0$

ولتوجد صيغة تقريباً لكل المراحل المتتالية

من صيغة أويلر:

$$y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^3}{3!} y^{(3)}_0 + \dots$$

عند  $x_2, x_1 \leftarrow x_2, x_1$  و  $y \leftarrow y_1$  و  $y_0 \leftarrow y_1$

$$y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0$$

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$

ولتوجد  $y''_0$

$$y''_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta' y_0}{\Delta x} \approx \frac{\Delta' y_0}{\Delta x} \quad \text{في} \quad \Delta x_2 y_1$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta' y_0 = y'_1 - y'_0$$

$$y''_0 = \frac{y'_1 - y'_0}{h}$$



$$\Rightarrow y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} \left( \frac{y'_1 - y'_0}{h} \right)$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (y'_0 + y'_1)$$

يمكن تعميم هذا المبرهن من أجل  $n$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_n + y'_{n+1})$$

$$y'_1 = f(x_1, \bar{y}_1)$$

للمتوسط  
للمرئبة أو للمربع

نلاحظ أنه  $\bar{y}_1$  حسب طريقة أويلر السابقة

$$\bar{y}_1 = y_0 + h y'_0$$

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}), \quad \bar{y}_{n+1} = y_n + h y'_n$$

مثال

أوجد بطريقة أويلر حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$xy' = x - y \quad \text{و} \quad y(2) = 2$$

وذلك عند النقطة:

$$h = 0.5, \quad x = 2.1$$

الحل

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_n + y'_{n+1})$$



$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (y'_0 + y'_1)$$

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = 1 - \frac{y_0}{x_0} = 0$$

$$y_0 = x_0$$

$$y'_1 = 1 - \frac{y_1}{x_1}, \quad x_1 = x_0 + h = 2.4 + 0.05 = 2.45$$

$$y_1 = y_0 + h y'_0 = 2.4 + 0 = 2.4$$

$$y'_1 = 1 - \frac{2.4}{2.45} = 0.05$$

$$\Rightarrow y_1 = 2.4 + \frac{0.05}{2} (0.4 + 2) = 2.45$$

$$y_2 = y(2.1) = y_1 + \frac{h}{2} (y'_1 + y'_2)$$

$$y'_1 = 1 - \frac{y_1}{x_1} = 1 - \frac{2.45}{2.45} = 0$$

$$y'_2 = 1 - \frac{y_2}{x_2}$$

$$(3) \text{ طريقة مشددة لـ } y$$

$$y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''_0 + \dots$$



$$= \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} y_0^{(k)}$$

$$y_1 = y_0 + h y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0^{(3)} + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} y_0^{(n)}$$

وهذه تكون دالة تيلور بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' + \frac{h^3}{3!} y_n''' + \dots + \frac{h^n}{n!} y_n^{(n)}$$

كلما زاد عدد الحدود المأخوذة من صيغة تيلور، كلما كانت النتيجة أقرب إلى القيمة الحقيقية.

مثال ١

أوجد بترقبة تيلور حل المعادلة التفاضلية:

$$x y' = x - y$$

باستخدام ما وجدناه،  $y(2) = 2$  عند  $x = 2$ ،

$$h = 0.1$$

الحل: نكتب المعادلة التفاضلية:

$$y' = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y_0' = 1 - 1 = 0$$

$$y'' = \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} \Rightarrow y_0'' = \frac{y_0}{x_0^2} - \frac{y_0'}{x_0} = \frac{1}{2}$$



$$y''' = -\frac{2y}{x^3} + \frac{y'}{x^2} - \frac{y''}{x}$$

$$= -\frac{2y}{x^3} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{y''}{x} \rightarrow$$

$$y''' = -\frac{3}{4}$$

بالنسبة لـ

$$y_1 = y(2.1) = 2 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) +$$

$$\frac{(0.1)^3}{6} \left(-\frac{3}{4}\right) = \dots$$

بالنسبة لـ

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n$$

→

$$y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{6} y'''_0$$

اتمنى الحاضرة في رابعة

بالقصر للمصير